



Cinematica degli scheletri



Corso di Realtà Virtuale
Laurea Magistrale in Informatica
Università degli Studi di Milano
Prof. Alberto Borghese
Laboratorio di Applied Intelligent Systems (Ais-Lab)
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it



A.A. 2021-2022

<http://borghese.di.unimi.it>



Sommario



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- La cinematica diretta

A.A. 2021-2022

2/37

<http://borghese.di.unimi.it>



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{KMA} \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Parametri esterni (4x4)

Parametri interni (3x3)

3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: $\{\mathbf{P}(X,Y,Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine $\{\mathbf{p}(x,y,f)\}$
- C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

- A) + B) \rightarrow C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).



Dal 2D al 3D

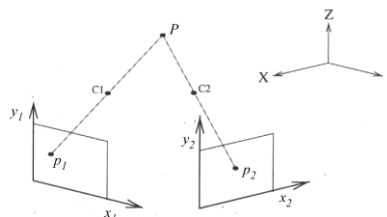
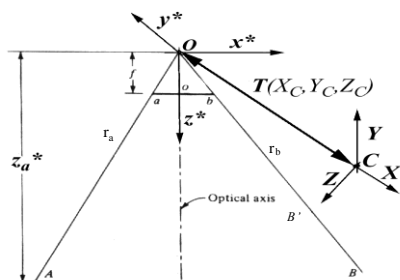


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Nello spazio 3D esistono ∞^1 punti compatibili con b

Sono tutti i punti nello spazio 3D, $\{X,Y,Z\}$ sulla retta per b e O

Ob identifica una retta

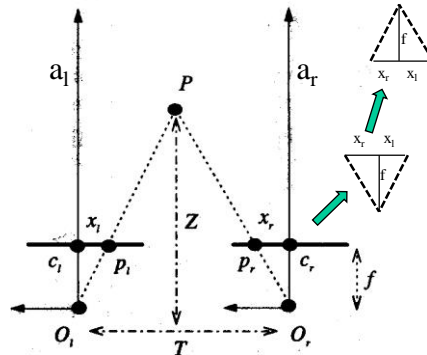
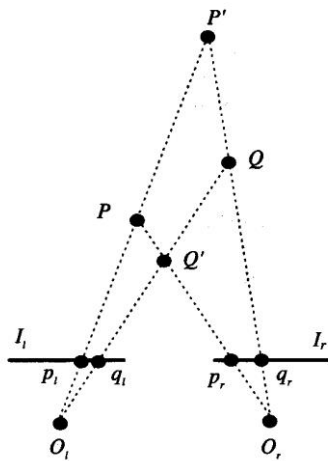
Soluzione: Stereoscopia
Visione attraverso una coppia di sensori



3D basato su stereo-disparità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $\{a_l, x_r\}$ coppia di assi ottici
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



(a) $Z / T = f / d = f / (x_l + x_r)$ (b)

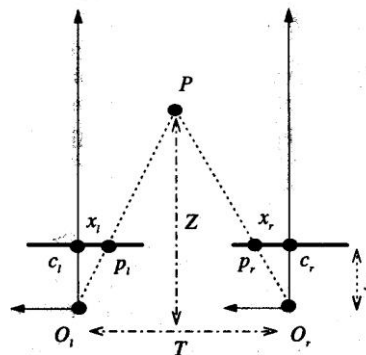
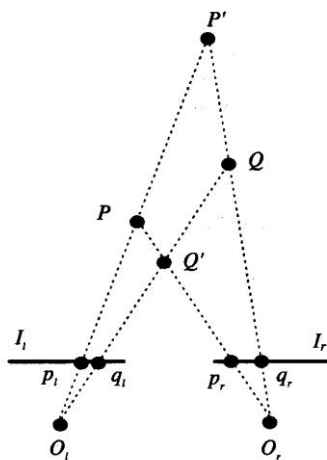
Nel sistema visivo umano, T rappresenta (approssimativamente) la distanza interpupillare, che viene regolata nei visori di VR sull'Utente.



Risoluzione nella profondità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $\{a_l, x_r\}$ coppia di assi ottici
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



(a)

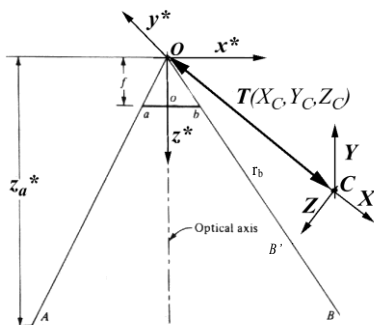
(b)

$Z / T = f / d \quad d = f T / Z$

$\Delta d / \Delta Z = -f T / Z^2$



Dal 2D al 3D nel caso generale



$$x_a = x_o + f * \frac{m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$y_a = y_o + f * \frac{m_{21}(X - X_C) + m_{22}(Y - Y_C) + m_{23}(Z - Z_C)}{m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)}$$

$$z_a = f$$

Invertiamo le Equazioni di collinearità

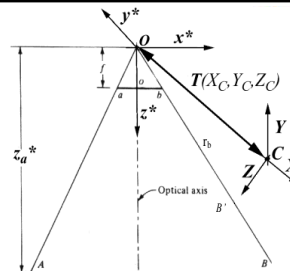
$$P(X, Y, Z) \Rightarrow p(x, y, f)$$

----->

$$p(x, y, f) \Rightarrow P(X, Y, Z)$$



Dal 2D al 3D



$$[m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)] * (x - x_o) = f [m_{11}(X - X_C) + m_{12}(Y - Y_C) + m_{13}(Z - Z_C)]$$

$$[m_{31}(X - X_C) + m_{32}(Y - Y_C) + m_{33}(Z - Z_C)] * (y - y_o) = f [m_{21}(X - X_C) + m_{22}(Y - Y_C) + m_{23}(Z - Z_C)]$$

$$p(x, y) \Rightarrow P(X, Y, Z)$$

Sono 2 equazioni lineari in 3 incognite X, Y, Z:

- $[m_{31}(x - x_o) - fm_{11}] * X + [m_{32}(x - x_o) - fm_{12}] * Y + [m_{33}(x - x_o) - fm_{13}] * Z = [m_{31}(x - x_o) - fm_{11}] * X_C + [m_{32}(x - x_o) - fm_{12}] * Y_C + [m_{33}(x - x_o) - fm_{13}] * Z_C$
- $[m_{31}(x - x_o) - fm_{21}] * X + [m_{32}(x - x_o) - fm_{22}] * Y + [m_{33}(x - x_o) - fm_{23}] * Z = [m_{31}(x - x_o) - fm_{21}] * X_C + [m_{32}(x - x_o) - fm_{22}] * Y_C + [m_{33}(x - x_o) - fm_{23}] * Z_C$

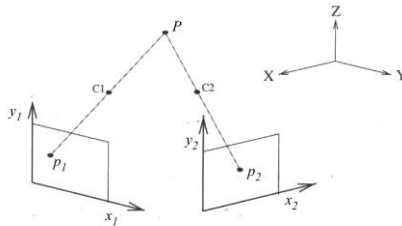
Le equazioni di collinearità individuano perciò 2 piani:

- $a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = d_1$
- $a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = d_2$

L'intersezione dei 2 piani mi dà la retta di proiezione Op nello spazio 3D.



Ricostruzione stereoscopica



2 coppie di immagini \rightarrow 2 coppie di equazioni di collinearità
 $\{p_1(x,y) \iff p_2(x,y)\}$

4 equazioni in 3 incognite:
 $[p_1(x,y) | p_2(x,y)] \Rightarrow P(XYZ).$

Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Equazioni di collinearità per due video-camere:

$$\bullet a_{1,TV1} X + b_{1,TV1} Y + c_{1,TV1} Z = d_{1,TV1}$$

$$\bullet a_{2,TV1} X + b_{2,TV1} Y + c_{2,TV1} Z = d_{2,TV1}$$

$$\bullet a_{1,TV2} X + b_{1,TV2} Y + c_{1,TV2} Z = d_{1,TV2}$$

$$\bullet a_{2,TV2} X + b_{2,TV2} Y + c_{2,TV2} Z = d_{2,TV2}$$

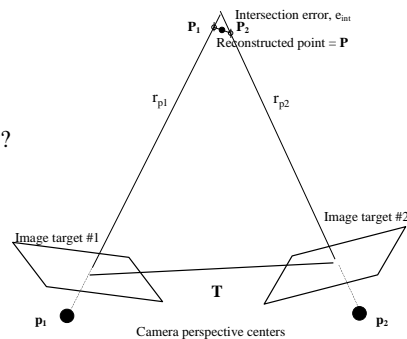


Ricostruzione - matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{1TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{2TV1} & b_{1TV1} & a_{1TV1} \\ a_{1TV2} & b_{1TV2} & c_{1TV2} \\ a_{2TV2} & b_{2TV2} & c_{2TV2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} d_{1TV1} \\ d_{2TV1} \\ d_{1TV2} \\ d_{2TV2} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

In forma matriciale: $A P = B \Rightarrow A^T A P = A^T B \Rightarrow P = (A^T A)^{-1} A^T B$

- Effetto dell'errore di misura: quanto vale P ?
- Quando non ammette soluzioni?



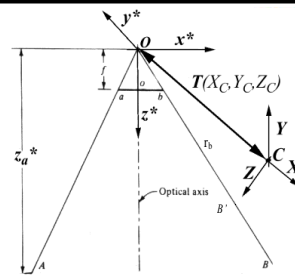


Ricostruzione - Ray intersection

Le equazioni di collinearità individuano individuano perciò una retta come intersezione di 2 piani:

- $a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1$
- $a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2$

L'intersezione dei 2 piani mi dà la retta di proiezione Op nello spazio 3D.



Altra soluzione: equazioni in forma parametrica delle due rette:

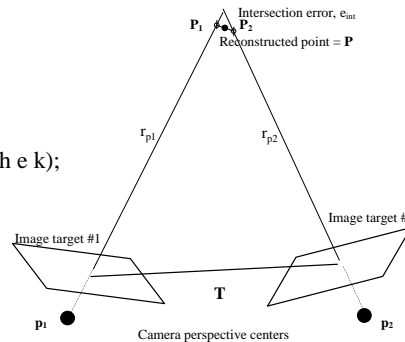
$$\begin{aligned} X_1 &= X_{c1} + a_1 k & X_2 &= X_{c2} + a_2 h \\ Y_1 &= Y_{c1} + b_1 k & Y_2 &= Y_{c2} + b_2 h \\ Z_1 &= Z_{c1} + c_1 k & Z_2 &= Z_{c2} + c_2 h \end{aligned}$$

$$\min_{h,k} [(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2]$$

- Calcolo della distanza (funzione dei due parametri, h e k);
- Minimizzazione (funzione dei due parametri).

Ritrovo la stessa soluzione.

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$$



Riassunto



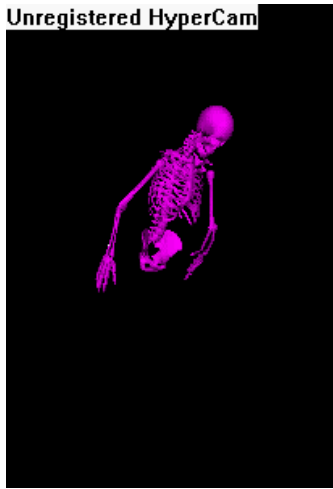
- Ricostruzione 3D
- **Catena cinematica**
- La cinematica diretta



Cinematica di uno scheletro



Unregistered HyperCam



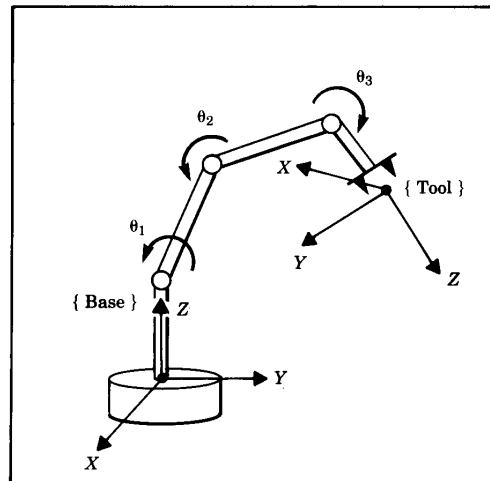
Curve di animazione associate ai gradi di libertà.



Cinematica diretta



Conosco il valore dei joint
(angolo o offset) \rightarrow posizione
ed orientamento dell'end-
point.



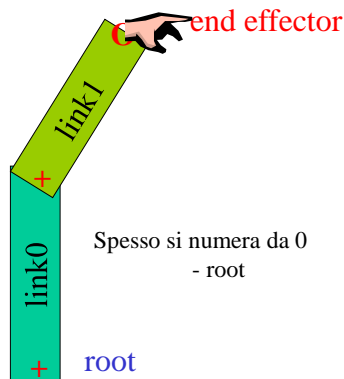
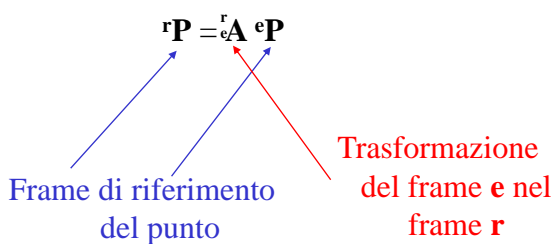
La cinematica viene descritta come sequenza di rotazioni / traslazioni / scala che hanno l'effetto di muovere l'end-effector solitamente nello spazio Cartesiano.



Convenzioni



$$\begin{bmatrix} {}^r X_P \\ {}^r Y_P \\ {}^r Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^e X_P \\ {}^e Y_P \\ {}^e Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

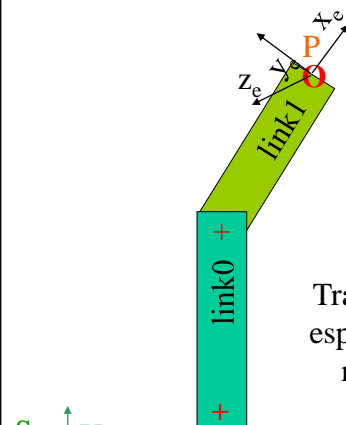


Posizione dei segmenti (I)

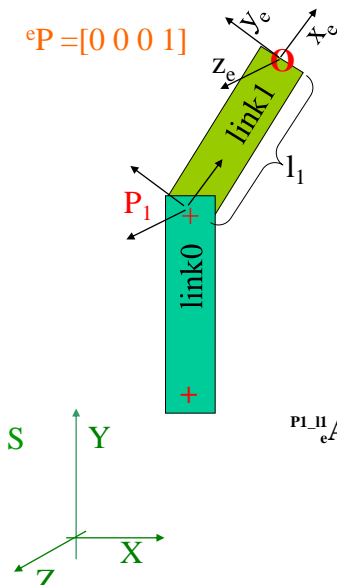


$${}^e P = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Punto P espresso nel frame dell'end-effector.



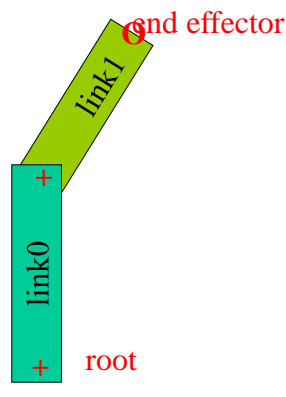
Posizione dei segmenti (II)



$${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

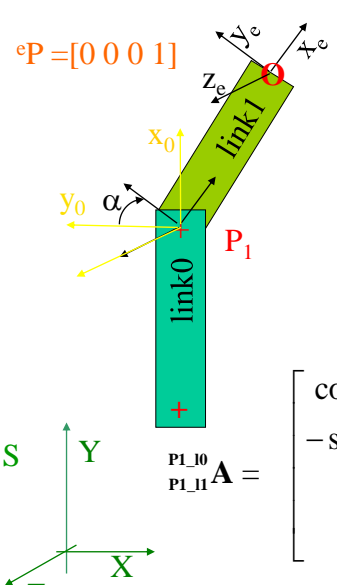
$${}^{P1_L1}\mathbf{P} = {}^{P1_L1}{}_e\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]^T$$

$${}^{P1_L1}{}_e\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2021-2022 17/37 http://borghese.di.unimi.it/

Posizione dei segmenti (III)

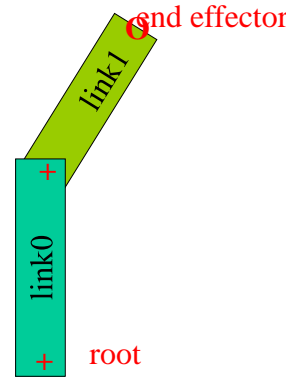


$${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$${}^{P1_L1}\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]$$

$${}^{P1_L0}\mathbf{P} = {}^{P1_L1}{}_{P1_L0}\mathbf{A} {}^{P1_L1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P1_L0}{}_{P1_L1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2021-2022 18/37 http://borghese.di.unimi.it/

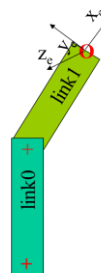


Posizione dei segmenti dall'end-point



$${}^{P1_{10}}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} P1_{10} \\ P1_{11} \end{matrix} \mathbf{A} \begin{matrix} P1_{11} \\ P1_{10} \end{matrix} \mathbf{A} =$$

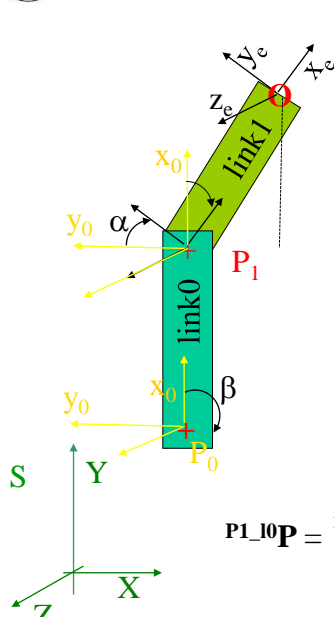
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P1}_{L0} \mathbf{P} = \begin{matrix} P1_{10} \\ P1_{11} \end{matrix} \mathbf{A} \mathbf{e} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [1, 0, 0, 1]^T$$



Esempio



$${}^{P1_{10}}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$${}^{P1_{10}}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P1}_{L0} \mathbf{P} = \begin{matrix} P1_{10} \\ P1_{11} \end{matrix} \mathbf{A} \mathbf{e} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Posizione dei segmenti (IV)

$eP = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

$${}^{P_0}_{L_0}P = {}^{P_0}_{P_1}A \cdot {}^{P_1}_{L_0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_1}_{L_0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0}_{P_1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

end effector

link0 +
+ root

A.A. 2021-2022 21/37 <http://borghese.di.unimi.it/>

Posizione dei segmenti (V)

$eP = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

$${}^{P_0}_{ABS}P = {}^{P_0}_{P_1}A \cdot {}^{P_1}_{L_0}P = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0}_{ABS}A = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_1}_{L_0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector

link0 +
+ root

A.A. 2021-2022 22/37 <http://borghese.di.unimi.it/>



Posizione dei segmenti (VI)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = {}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} \cdot {}^e\mathbf{P} =$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector

${}_{\text{P0}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

link0 + root

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{P0_ABS}}\mathbf{P} =$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

link1 +

A.A. 2021-2022 23/37 http://borghese.di.unimi.it/



Concatenando le trasformazioni



${}_{\text{e}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} = {}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} \cdot {}_{\text{P0_10}}^{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \cdot {}_{\text{P1_10}}^{\text{P0_10}}\mathbf{A} \cdot {}_{\text{P1_11}}^{\text{P1_10}}\mathbf{A} \cdot {}_{\text{e}}^{\text{P1_11}}\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}_{\text{e}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}_{\text{P0_ABS}}^{\text{P0_ABS}}\mathbf{P} = {}_{\text{e}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} \cdot {}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

link0 + root

link1 +

A.A. 2021-2022 24/37 http://borghese.di.unimi.it/



Posizione dei segmenti: fattorizzazione



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{ABS_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS_ABS}\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} =$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagram showing two links: link0 (vertical) and link1 (rotated). Link0 starts at point P0 with local axes x0, y0. Link1 starts at point P1 with local axes xc, yc. The angle between the vertical axis and link1 is alpha + beta. The angle between the horizontal axis and link0 is beta. The end effector is at the end of link1.

${}^{ABS_ABS}\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2021-2022 25/37 http://borghese.di.unimi.it/



Esempio di calcolo della posizione



$\alpha = \beta = 0$

${}^{ABS_ABS}\mathbf{P} =$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_0 + T_x \\ T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diagram showing the simplified configuration where alpha = beta = 0. Link0 is vertical and link1 is horizontal, forming a straight line. The end effector is at the end of link1. The root is at the origin of the coordinate system.

A.A. 2021-2022 26/37 http://borghese.di.unimi.it/



Dall'end-effector alla base



- Il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della **geometria** (lunghezze dei segmenti) e dei **parametri liberi** (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).
- Le rotazioni vengono definite in un **sistema di riferimento locale**.
- Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre....

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [\begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A} \end{matrix}] {}^e\mathbf{P}$$

fattorizzare le matrici di trasformazione.

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} = \begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A} \end{matrix}$$

A.A. 2021-2022

27/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



Osservazioni sulle matrici di trasformazione, A



Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base.

A è funzione di:

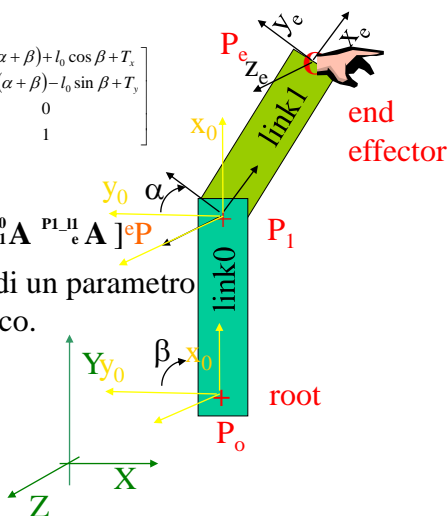
- Geometria
- Parametri liberi

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [\begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_ABS}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P0_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I0}}_e\mathbf{A} & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A} \end{matrix}] {}^e\mathbf{P}$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [\begin{matrix} {}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A}(T) & {}^{\text{P0_ABS}}_e\mathbf{A}(\beta) \\ {}^{\text{P0_I0}}_e\mathbf{A}(l_0) & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}(\alpha) & {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}(l_1) \end{matrix}] {}^e\mathbf{P}$$



A.A. 2021-2022

28/37

<http://borghese.di.unimi.it/>



Quante matrici di trasformazione?



- Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
- Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
- Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.

- Notazione molto generale (approccio costruttivo).
- Notazione prolissa.

- Si arriva a 1 matrice di trasformazione, qualsiasi il numero di trasformazioni elementari.
- La matrice di trasformazione complessiva viene costruita in modo incrementale, rispettando la gerarchia.



Riassunto



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- **La cinematica diretta**

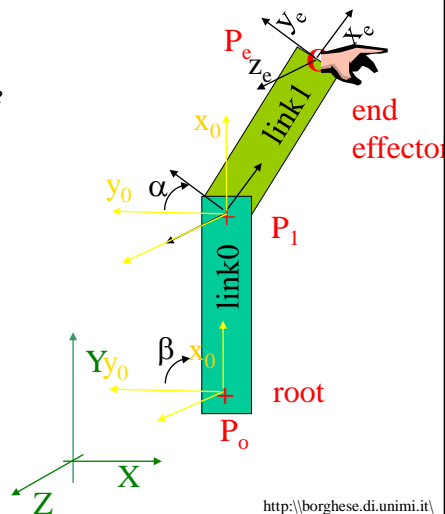


La cinematica diretta



Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento di ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint, dalla base all'end-effector.



Come animare uno scheletro



Data la sequenza di angoli (**relativi**) è possibile determinare istante per istante la posizione del braccio e dell'end-effector.

Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?

Joint space (peso dei joint)

Rotazione attorno a P_0 (angolo β)

Rotazione attorno a P_1 (angolo α)

La posizione dell'end effector è diversa a parità di rotazione.

A.A. 2021-2022 33/37 http://borghese.di.unimi.it/

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)

$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = {}_{ABS_ABS}A(t) \ eP$$

$$\implies$$

$${}_{ABS_ABS}P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

A.A. 2021-2022 34/37 http://borghese.di.unimi.it/



Descrizione cinematica diretta



$$\mathbf{ABS_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ABS_ABS}\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ABS_ABS}\mathbf{P}(t) = \mathbf{f}(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Sequenza temporale di $[\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)] \rightarrow$ sequenza temporale di $\mathbf{ABS_ABS}\mathbf{P}(t)$.

imi.it\



Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$\mathbf{ABS_ABS}\mathbf{P}(t) = \mathbf{ABS_ABS}\mathbf{A}(t) \mathbf{e}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{ABS_ABS}\mathbf{P}_x(t) = \mathbf{f}_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$\mathbf{ABS_ABS}\mathbf{P}_y(t) = \mathbf{f}_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$\mathbf{ABS_ABS}\mathbf{P}_z(t) = \mathbf{f}_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Ciascuna di queste funzioni è rappresentata come prodotto di una riga della matrice \mathbf{A} per \mathbf{P} .



Riassunto



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- La cinematica diretta